

Sur un critère de Báez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann

Michel Balazard et Anne de Roton

9 décembre 2008

Pour Luis Báez-Duarte, à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire.

ABSTRACT

Define $e_n(t) = \{t/n\}$. Let d_N denote the distance in $L^2(0, \infty; t^{-2} dt)$ between the indicator function of $[1, \infty[$ and the vector space generated by e_1, \dots, e_N . A theorem of Báez-Duarte states that the Riemann hypothesis (RH) holds if and only if $d_N \rightarrow 0$ when $N \rightarrow \infty$. Assuming RH, we prove the estimate

$$d_N^2 \leq (\log \log N)^{5/2+o(1)} (\log N)^{-1/2}.$$

KEYWORDS

Riemann zeta function, Riemann hypothesis, Báez-Duarte criterion, Möbius function.

MSC classification : 11M26

1 Position du problème et énoncé du résultat principal

L'étude de la répartition des nombres premiers se ramène à la recherche d'approximations de la fonction

$$\chi(x) = [x \geq 1] \tag{1}$$

par des combinaisons linéaires

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N c_n \{x/n\} \quad (N \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

de dilatées de la fonction « partie fractionnaire ». Ce fait est connu depuis Tchebychev (cf. [15]). En choisissant

$$\varphi(x) = -\{x\} + \{x/2\} + \{x/3\} + \{x/5\} - \{x/30\}$$

il avait observé l'encadrement

$$\varphi(x) \leq \chi(x) \leq \sum_{k \geq 0} \varphi(x/6^k)$$

pour en déduire

$$Ax + O(\log x) \leq \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \leq \frac{6}{5}Ax + O(\log^2 x)$$

où Λ désigne la fonction de von Mangoldt, et

$$A = \log \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0,92129202 \dots$$

On peut préciser la nature de l'approximation de (1) par (2) équivalente au théorème des nombres premiers

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x \quad (x \rightarrow \infty),$$

où à l'hypothèse de Riemann

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O_\delta(x^{\frac{1}{2}+\delta}) \quad (x \geq 1, \delta > 0).$$

Ainsi, le théorème des nombres premiers est équivalent* à l'assertion

$$\inf_{\varphi} \int_0^\infty |\chi(x) - \varphi(x)| \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Quant à l'hypothèse de Riemann, Báez-Duarte (cf. [4]) a démontré qu'elle équivaut à

$$\inf_{\varphi} \int_0^\infty |\chi(x) - \varphi(x)|^2 \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Dans les deux cas, l'infimum est pris sur les φ de la forme (2).

Nous nous intéressons dans cet article à une forme quantitative de ce critère. Soit H l'espace de Hilbert $L^2(0, \infty; t^{-2} dt)$ et, pour $\alpha > 0$,

$$e_\alpha(t) = \{t/\alpha\} \quad (t > 0).$$

Posons, pour N entier positif,

$$d_N = \text{dist}_H(\chi, \text{Vect}(e_1, \dots, e_N)).$$

Ainsi, le critère de Báez-Duarte affirme que l'hypothèse de Riemann équivaut à la convergence de d_N vers 0, quand N tend vers l'infini.

Examinons maintenant la vitesse de cette convergence. D'une part, Burnol (cf. [6]) a démontré que

$$d_N^2 \geq \frac{C + o(1)}{\log N}, \quad N \rightarrow +\infty,$$

où

$$C = \sum_{\rho} \frac{m(\rho)^2}{|\rho|^2},$$

la somme portant sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ , et $m(\rho)$ désignant la multiplicité de ρ comme zéro de ζ .

*Bien entendu, deux énoncés vrais sont toujours équivalents ; nous renvoyons à [9] et [1] pour des énoncés précis sur ce sujet.

Comme

$$\sum_{\rho} \frac{\mathfrak{m}(\rho)}{|\rho|^2} = 2 + \gamma - \log(4\pi)$$

(si l'hypothèse de Riemann est vraie, cf. [8], chapitre 12, (10), (11)), on en déduit en particulier que

$$d_N^2 \geq \frac{2 + \gamma - \log(4\pi) + o(1)}{\log N}, \quad N \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

D'autre part, les auteurs de [3] conjecturent l'égalité dans (3). Cette conjecture entraîne donc l'hypothèse de Riemann et la simplicité des zéros de ζ .

Le comportement asymptotique de d_N est difficile à déterminer, même conditionnellement à l'hypothèse de Riemann et d'autres conjectures classiques (simplicité des zéros de ζ , conjecture de Montgomery sur la corrélation par paires,...). Dans [4], Báez-Duarte donne une démonstration (dûe au premier auteur) de la majoration

$$d_N^2 \ll (\log \log N)^{-2/3}$$

sous l'hypothèse de Riemann. Nous améliorons ce résultat dans le présent travail.

Théorème *L'hypothèse de Riemann entraîne que*

$$d_N^2 \ll_{\delta} (\log \log N)^{5/2+\delta} (\log N)^{-1/2} \quad (N \geq 3),$$

pour tout $\delta > 0$.

Le plan de notre article est le suivant. Au §2 nous rappelons le rôle de la fonction de Möbius dans ce problème. Nous y majorons d_N^2 par la somme de deux quantités, $I_{N,\varepsilon}$ et J_{ε} , où ε est un paramètre positif, et nous énonçons les estimations de ces quantités qui permettent de démontrer notre théorème. Le §3 contient une étude de la fonction $\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)$ nécessaire à la majoration, au §4, de la quantité J_{ε} . Les §§5 et 6 concernent l'estimation des sommes partielles de la série de Dirichlet de l'inverse de la fonction ζ . Cela nous permet de majorer $I_{N,\varepsilon}$ au §7, concluant ainsi la démonstration.

Il apparaîtra clairement que notre travail doit beaucoup à l'article récent [14]. Nous remercions son auteur, Kannan Soundararajan, pour une correspondance instructive concernant [14].

Le paramètre δ est fixé une fois pour toutes. On suppose $0 < \delta \leq 1/2$. On pose pour tout nombre complexe s

$$\sigma = \Re s, \quad \tau = \Im s.$$

Les symboles de Bachmann O et de Vinogradov \ll (resp. \ll_{δ}) qui apparaissent sous-entendent toujours des constantes absolues (resp. dépendant uniquement de δ) et effectivement calculables. Enfin nous indiquerons, par les initiales (*HR*) placées au début de l'énoncé d'une proposition, que la démonstration que nous en donnons utilise l'hypothèse de Riemann.

2 Pertinence de la fonction de Möbius

Partant de l'identité

$$\chi = - \sum_{n \geq 1} \mu(n) e_n$$

(valable au sens de la convergence simple), Báez-Duarte a d'abord montré (cf. [2]) la divergence dans H de la série du second membre. Il a ensuite proposé d'approcher χ dans H par les sommes

$$- \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} e_n,$$

où ε est un paramètre positif, à choisir convenablement en fonction de N .

En posant

$$\nu_{N,\varepsilon} = \left\| \chi + \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} e_n \right\|_H^2,$$

on a évidemment $d_N^2 \leq \nu_{N,\varepsilon}$ pour $N \geq 1$, $\varepsilon > 0$. Posons maintenant pour $N \geq 1$ et $s \in \mathbb{C}$:

$$M_N(s) = \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-s}.$$

On sait depuis Littlewood (cf. [11]) que l'hypothèse de Riemann entraîne la convergence de $M_N(s)$ vers $\frac{1}{\zeta(s)}$ quand N tend vers l'infini, pour tout s tel que $\Re s > \frac{1}{2}$. Nous allons faire apparaître la différence $M_N - 1/\zeta$ pour majorer $\nu_{N,\varepsilon}$.

Proposition 1 *Pour $N \geq 1$ et $\varepsilon > 0$, on a*

$$\nu_{N,\varepsilon} \leq 2I_{N,\varepsilon} + 2J_\varepsilon,$$

où

$$I_{N,\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} |\zeta(s)|^2 |M_N(s+\varepsilon) - \zeta(s+\varepsilon)^{-1}|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \quad \text{et} \quad J_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} - 1 \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2}.$$

Démonstration

La transformation de Mellin associe à toute fonction $f \in H$ une fonction $\mathfrak{M}f$, définie pour presque tout s tel que $\sigma = 1/2$ par la formule

$$\mathfrak{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{-s-1} dt$$

(où $\int_0^{+\infty}$ signifie $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/T}^T$).

De plus, le théorème de Plancherel affirme que $f \mapsto \mathfrak{M}f$ est un opérateur unitaire entre H et $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$, espace que nous noterons simplement L^2 . Comme

$$\mathfrak{M}e_\alpha(s) = \alpha^{-s} \frac{\zeta(s)}{-s}, \quad \mathfrak{M}\chi(s) = \frac{1}{s},$$

on a

$$\begin{aligned}
\nu_{N,\varepsilon} &= \left\| \chi + \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} e_n \right\|_H^2 \\
&= \left\| \frac{1}{s} + \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} n^{-s} \frac{\zeta(s)}{-s} \right\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} |1 - \zeta(s) M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| 1 - \frac{\zeta(s)}{\zeta(s + \varepsilon)} \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s + \varepsilon)} - \zeta(s) M_N(s + \varepsilon) \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \\
&\quad (\text{où l'on a utilisé l'inégalité } |a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)) \\
&= 2J_\varepsilon + 2I_{N,\varepsilon}.
\end{aligned}$$

□

Observons que la proposition 1 ne dépend pas de l'hypothèse de Riemann, mais que les quantités $I_{N,\varepsilon}$ et J_ε pourraient être infinies si elle était fausse.

Dans [4], Báez-Duarte démontre (sous l'hypothèse de Riemann) que $I_{N,\varepsilon}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini (pour tout $\varepsilon > 0$ fixé), et que $J(\varepsilon)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0. On a donc bien $d_N = o(1)$.

La version quantitative donnée dans [4] repose sur les estimations

$$J(\varepsilon) \ll \varepsilon^{2/3} \quad (0 < \varepsilon \leq 1/2),$$

et

$$I_{N,\varepsilon} \ll N^{-2\varepsilon/3} \quad (c/\log \log N \leq \varepsilon \leq 1/2),$$

où c est une constante positive absolue. Nous démontrons ici les deux propositions suivantes.

Proposition 2 (HR) *On a $J_\varepsilon \ll \varepsilon$.*

Proposition 3 (HR) *Soit $\delta > 0$. Pour $N \geq N_0(\delta)$ et $\varepsilon \geq 25(\log \log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2}$, on a*

$$I_{N,\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon/2}.$$

Le choix $\varepsilon = 25(\log \log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2}$ donne le théorème.

3 Étude du quotient $\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, nous étudions, sous l'hypothèse de Riemann, le comportement de la fonction $\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)$ dans le demi-plan $\sigma \geq 1/2$, quand ε tend vers 0. Afin de préciser, sur certains points, l'exposé de Burnol dans [7], nous utilisons le produit de Hadamard de $\zeta(s)$ et majorons chaque facteur de $\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)$.

Nous supposons $0 < \varepsilon \leq 1/2$.

Proposition 4 (HR) *On a les estimations suivantes.*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \right|^2 \ll |s|^\varepsilon \quad (\sigma = 1/2); \\
(ii) \quad & \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \right|^2 \leq 1 + O(\varepsilon|s|^{1/2}) \quad (\sigma = 1/2); \\
(iii) \quad & \frac{\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)}{s(1-s)} \ll \frac{|s|^{\varepsilon/2}}{|s-1|^2} \quad (\sigma \geq 1/2, s \neq 1).
\end{aligned}$$

Démonstration

Si l'on pose

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

on a

$$\xi(s) = \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

où le produit porte sur les zéros non triviaux ρ de la fonction ζ , et doit être calculé par la formule $\prod_{\rho} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \prod_{|\gamma| \leq T}$ (on pose $\rho = \beta + i\gamma$). Par conséquent

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} = \pi^{-\varepsilon/2} \frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)} \frac{\Gamma((s+\varepsilon)/2)}{\Gamma(s/2)} \prod_{\rho} \frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho}. \quad (4)$$

Examinons successivement les facteurs apparaissant dans (4). On a d'abord $\pi^{-\varepsilon/2} < 1$. Ensuite, on a

$$\left| \frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)} \right| \ll \left| \frac{s}{s-1} \right| \quad (\sigma \geq 1/2, s \neq 1), \quad (5)$$

$$\left| \frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)} \right| \leq \exp(O(\varepsilon/|s|)) \quad (\sigma = 1/2). \quad (6)$$

Pour le quotient des fonctions Γ apparaissant dans la formule (4), on dispose de l'inégalité suivante, qui résulte de la formule de Stirling complexe.

$$\left| \frac{\Gamma((s+\varepsilon)/2)}{\Gamma(s/2)} \right| \leq |s/2|^{\varepsilon/2} \exp(O(\varepsilon/|s|)) \quad (\sigma \geq 1/2). \quad (7)$$

Pour majorer le produit infini apparaissant dans (4), on utilise l'inégalité

$$\left| \frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho} \right| < 1, \quad \sigma \geq \beta, \quad \varepsilon > 0,$$

qui donne par conséquent (sous l'hypothèse de Riemann)

$$\left| \prod_{\rho} \frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho} \right| < 1 \quad (\sigma \geq 1/2). \quad (8)$$

Notons ensuite les inégalités

$$\exp(\varepsilon \log x/2 + O(\varepsilon/x)) \ll (x/2)^\varepsilon, \quad (9)$$

et

$$\exp(\varepsilon \log x/2 + O(\varepsilon/x)) \leq 1 + O(\varepsilon x^{1/2}), \quad (10)$$

valables pour $x \geq 1/2$.

L'estimation (i) résulte alors de (4), (6), (7), (8) et (9); l'estimation (ii) de (4), (6), (7), (8) et (10), et l'estimation (iii) de (4), (5), (7), (8) et (9). \square

4 Majoration de J_ε

On suppose, comme au §3, que ε vérifie $0 < \varepsilon \leq 1/2$. On pose

$$K_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \quad \text{et} \quad L_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \frac{d\tau}{|s|^2},$$

de sorte que

$$J_\varepsilon = K_\varepsilon - 2L_\varepsilon + 1. \quad (11)$$

Pour majorer J_ε , nous allons calculer exactement L_ε à l'aide du théorème des résidus, et majorer K_ε en utilisant les résultats du paragraphe précédent.

Proposition 5 (HR) *On a*

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \frac{\gamma-1}{\zeta(1+\varepsilon)} - \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta^2(1+\varepsilon)} \\ &= 1 - (\gamma+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \frac{d\tau}{|s|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=1/2} Q(s) ds, \end{aligned}$$

où

$$Q(s) = \frac{\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)}{s(1-s)}.$$

Soit Π le demi-plan $\sigma \geq \frac{1}{2}$, et Δ la droite $\sigma = \frac{1}{2}$. La fonction Q est méromorphe dans Π , holomorphe sur Δ . Dans Π elle a un unique pôle, double, en $s = 1$ où son résidu vaut

$$\frac{1-\gamma}{\zeta(1+\varepsilon)} + \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta^2(1+\varepsilon)}.$$

D'après la proposition 4, (iii), on a $sQ(s) \rightarrow 0$ uniformément quand $|s| \rightarrow +\infty$, $s \in \Pi$, et

$$\int_{\Delta} |Q(s)| \cdot |ds| < +\infty.$$

Nous sommes donc en situation d'appliquer une proposition classique du calcul des résidus (cf. par exemple [18]§6.22) pour en déduire

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon} &= -\text{Res} \left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{s(1-s)} \right) \Big|_{s=1} \\ &= \frac{\gamma-1}{\zeta(1+\varepsilon)} - \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta^2(1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité vaut

$$1 - (\gamma+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

puisque

$$\frac{1}{\zeta(1+\varepsilon)} = \varepsilon - \gamma\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'estimation $J_{\varepsilon} \ll \varepsilon$, objet de la proposition 2. En intégrant l'inégalité (ii) de la proposition 4 sur la droite $\sigma = 1/2$ avec la mesure $d\tau/|s^2|$, on obtient

$$K_{\varepsilon} - 1 \ll \varepsilon.$$

Le résultat découle alors de (11) et de la proposition 5.

En considérant la contribution à J_{ε} d'un voisinage de l'ordonnée d'un zéro simple de ζ (par exemple $\gamma_1 = 14, 1347 \dots$), on peut montrer inconditionnellement que $J_{\varepsilon} \gg \varepsilon$. Il serait intéressant de préciser le comportement asymptotique de J_{ε} quand ε tend vers 0.

5 Quelques propriétés de la fonction ζ sous l'hypothèse de Riemann

Afin d'établir la majoration de la proposition 3, nous allons étudier $M_N(s+\varepsilon)$. Pour cela, nous allons utiliser la méthode inventée par Maier et Montgomery dans l'article [12], dévolue à $M_N(0) = M(N)$. Ils y démontrent que

$$M(N) = \sum_{n \leq N} \mu(n) \ll \sqrt{N} \exp((\log N)^{39/61})$$

sous l'hypothèse de Riemann. Leur approche a été ensuite perfectionnée par Soundararajan (cf. [14]), qui a obtenu l'estimation

$$M(N) \ll \sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{14}),$$

toujours sous l'hypothèse de Riemann. La méthode de Soundararajan donne en fait

$$M(N) \ll_{\delta} \sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+\delta}),$$

pour tout δ tel que $0 < \delta \leq 1/2$. Nous allons maintenant rappeler les éléments de la méthode de Soundararajan qui seront utilisés dans notre argumentation, avec les quelques modifications qui permettent d'obtenir l'exposant $5/2 + \delta$. On trouvera les démonstrations dans l'article [14] (cf. aussi [5] pour un exposé détaillé des modifications).

5.1 Ordonnées V -typiques

L'évaluation de $M_N(s + \varepsilon)$ grâce à la formule de Perron fera appel à un contour sur lequel les grandes valeurs de $|\zeta(z)|^{-1}$ seront aussi rares que possible. Pour quantifier cette rareté, Soundararajan a introduit la notion suivante.

Soit T assez grand[†] et V tel que $(\log \log T)^2 \leq V \leq \log T / \log \log T$. Un nombre réel t est appelé une **ordonnée V -typique de taille T** si

- $T \leq t \leq 2T$;
- (i) pour tout $\sigma \geq 1/2$, on a

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \right| \leq 2V, \quad \text{où } x = T^{1/V};$$

(ii) tout sous-intervalle de $[t-1, t+1]$ de longueur $2\pi\delta V / \log T$ contient au plus $(1+\delta)V$ ordonnées de zéros de ζ ;

(iii) tout sous-intervalle de $[t-1, t+1]$ de longueur $2\pi V / ((\log V) \log T)$ contient au plus V ordonnées de zéros de ζ .

Si $t \in [T, 2T]$ ne vérifie pas l'une des assertions (i), (ii), (iii), on dira que t est une **ordonnée V -atypique de taille T** .

L'apport de cette définition à l'estimation de $M_N(s + \varepsilon)$ via la formule de Perron (§6 ci-dessous) est contenu dans l'énoncé suivant (proposition 9 de [5]).

Proposition 6 (HR) *Soit t assez grand, et $x \geq t$. Soit V' tel que $(\log \log t)^2 \leq V' \leq (\log t/2)/(\log \log t/2)$. On suppose que t est une ordonnée V' -typique (de taille T'). Soit $V \geq V'$.*

Alors

$$|x^z \zeta(z)^{-1}| \leq \sqrt{x} \exp(V \log(\log x / \log t) + (2+3\delta)V \log \log V) \quad (V' \leq (\Re z - 1/2) \log x \leq V, \quad |\Im z| = t).$$

5.2 Majoration de l'écart entre le nombre de zéros de la fonction ζ et sa moyenne, dans un intervalle de la droite critique

La proposition suivante (cf. [5], proposition 15) donne une majoration de l'écart entre le nombre d'ordonnées de zéros de ζ dans l'intervalle $]t-h, t+h]$ et sa valeur moyenne $(h/\pi) \log(t/2\pi)$. Cet encadrement est exprimé au moyen d'un paramètre Δ , et met notamment en jeu un polynôme de Dirichlet de longueur $\exp 2\pi\Delta$.

Proposition 7 (HR) *Soit $\Delta \geq 2$ et $h > 0$. Il existe des nombres réels $a(p) = a(p, \Delta, h)$ (p premier, $p \leq e^{2\pi\Delta}$) vérifiant*

- $|a(p)| \leq 4$ pour $p \leq e^{2\pi\Delta}$;
- pour tout t tel que $t \geq \max(4, h^2)$, on a

$$N(t+h) - N(t-h) - 2h \frac{\log t/2\pi}{2\pi} \leq \frac{\log t}{2\pi\Delta} + \sum_{p \leq e^{2\pi\Delta}} \frac{a(p) \cos(t \log p)}{p^{\frac{1}{2}}} + O(\log \Delta).$$

[†]Ici et dans la suite, cela signifie que $T \geq T_0(\delta)$, quantité effectivement calculable, et dépendant au plus de δ .

Lorsqu'on majore trivialement le polynôme de Dirichlet qui intervient dans cette proposition, on obtient le résultat suivant, dû à Goldston et Gonek (cf. [10]). Notre énoncé est légèrement plus précis que celui de [10].

Proposition 8 *Soit t assez grand et $0 < h \leq \sqrt{t}$. On a*

$$N(t+h) - N(t-h) - (h/\pi) \log(t/2\pi) \leq (\log t)/2 \log \log t + (1/2 + o(1)) \log t \log \log \log t / (\log \log t)^2.$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq e^{2\pi\Delta}} \frac{a(p) \cos t \log p}{p^{\frac{1}{2}}} \right| &\ll \sum_{p \leq e^{2\pi\Delta}} \frac{1}{\sqrt{p}} \\ &\ll \frac{e^{\pi\Delta}}{\Delta}. \end{aligned}$$

On choisit $\Delta = \frac{1}{\pi} \log(\log t / \log \log t)$ et on vérifie alors que

$$\frac{\log t}{2\pi\Delta} + O(e^{\pi\Delta}/\Delta) + O(\log \Delta) = (\log t)/2 \log \log t + (1/2 + o(1)) \log t \log \log \log t / (\log \log t)^2. \quad \square$$

La proposition suivante est une variante un peu plus précise de la première assertion de la Proposition 4 de [14].

Proposition 9 *Soit T assez grand, et V tel que*

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \delta \right) \log \log \log T / \log \log T \leq V \log \log T / \log T \leq 1.$$

Alors toute ordonnée $t \in [T, 2T]$ est V -typique.

Démonstration

Il faut vérifier les critères (i), (ii), (iii) de la définition d'une ordonnée V -typique.

Pour (i), on a pour $\sigma \geq 1/2$, $t \in \mathbb{R}$, et $x = T^{1/V}$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \right| &\leq \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \\ &\ll \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^2} \\ &\ll \frac{\log T}{(\log \log T)^2} \quad (\text{car } x = T^{1/V} \leq (\log T)^2) \\ &= o(V). \end{aligned}$$

Pour (ii) on a, avec $t' \in [t-1, t+1]$ et $h = \pi\delta V / \log T$:

$$\begin{aligned} N(t'+h) - N(t'-h) &\leq (h/\pi) \log(t'/2\pi) + \frac{1}{2} \log t' / \log \log t' + (1/2 + o(1)) \log t' \log \log \log t' / (\log \log t')^2 \\ &\quad (\text{proposition 8}) \\ &\leq (h/\pi) \log T + \frac{1}{2} \log T / \log \log T + (1/2 + \delta) \log T \log \log \log T / (\log \log T)^2 \\ &\leq (1 + \delta)V. \end{aligned}$$

Pour (iii) on a, avec $t' \in [t-1, t+1]$ et $h = \pi V / ((\log V) \log T)$:

$$\begin{aligned}
N(t' + h) - N(t' - h) &\leq (h/\pi) \log(t'/2\pi) + \frac{1}{2} \log t' / \log \log t' + (1/2 + o(1)) \log t' \log \log \log t' / (\log \log t')^2 \\
&\leq \frac{V}{\log V} + \frac{1}{2} \log T / \log \log T + (1/2 + o(1)) \log T \log \log \log T / (\log \log T)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \log T / \log \log T + (1/2 + \delta) \log T \log \log \log T / (\log \log T)^2 \\
&\leq V.
\end{aligned}$$

□

6 Approximation de l'inverse de la fonction ζ par ses sommes partielles

Le but de ce paragraphe est la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 10 *Soit N assez grand et $\varepsilon \geq 25(\log \log N)^{5/2+6\delta}(\log N)^{-1/2}$. Alors, pour $|\tau| \leq N^{3/4}$, on a*

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/4} (1 + |\tau|)^{1/2 - \beta(\tau)},$$

$$\text{où } \beta(\tau) = \frac{\log \log \log(16 + |\tau|)}{2 \log \log(16 + |\tau|)}.$$

Elle résultera de diverses estimations, valables uniformément quand τ et ε appartiennent à certains intervalles définis en termes de N , longueur du polynôme de Dirichlet M_N , approximant la fonction ζ^{-1} . Pour plus de clarté dans l'exposé, nous développons séparément les analyses relatives aux deux paramètres τ et ε . Nous commençons par l'étude de

$$M_N(i\tau) = \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-i\tau},$$

pour $\tau \in \mathbb{R}$.

6.1 Estimation de $M_N(i\tau)$ pour les petites valeurs de $|\tau|$

Commençons par le résultat obtenu par sommation partielle à partir de la majoration de Soundararajan (cf. [14] et [5])

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \ll \sqrt{x} \exp C(\log x), \quad x \geq 3,$$

où $C(u) = u^{1/2}(\log u)^{5/2+\delta}$. Observons que $C'(u) = O(1)$, $u \geq 1$.

Proposition 11 *On a uniformément*

$$M_N(i\tau) \ll (1 + |\tau|) \sqrt{N} \exp C(\log N), \quad N \geq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

La démonstration (standard) est laissée au lecteur. Pour aller plus loin, nous allons appliquer la formule de Perron et suivre la démarche de Soundararajan dans [14].

6.2 Estimation de $M_N(i\tau)$ pour les grandes valeurs de $|\tau|$

Nous utiliserons la majoration simple suivante.

Proposition 12 *Pour $0 < \delta \leq 1/12$, N assez grand et*

$$\exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta}) \leq |\tau| \leq N^{3/4},$$

on a

$$M_N(i\tau) \ll N^{1/2} |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)},$$

où $\kappa(\tau) = \frac{1}{2} \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|$.

Démonstration Dans toute la démonstration, N sera supposé assez grand.

Première étape : formule de Perron

La première étape de la démonstration consiste à appliquer la formule de Perron à la hauteur $N_1 = 2^{\lfloor \log N / \log 2 \rfloor}$ (le choix d'une puissance de 2 simplifie l'exposé de [5]), ce qui pour $\tau \in \mathbb{R}$ donne

$$\begin{aligned} M_N(i\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/\log N-iN_1}^{1+1/\log N+iN_1} \zeta(z+i\tau)^{-1} \frac{N^z}{z} dz + O(N \log N_1 / N_1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/\log N-i(N_1-\tau)}^{1+1/\log N+i(N_1+\tau)} \zeta(z)^{-1} \frac{N^{z-i\tau}}{z-i\tau} dz + O(\log N) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $|\tau| \leq N/5$ et remplaçons l'intégrale par $N^{-i\tau} B_N$, où

$$B_N = B_N(i\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/\log N-iN_1}^{1+1/\log N+iN_1} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z-i\tau} dz.$$

L'erreur commise est alors majorée par

$$\frac{1}{2\pi} \int_{N_1-|\tau| \leq |\Im z| \leq N_1+|\tau|} |\zeta(z)^{-1}| \left| \frac{N^z dz}{z-i\tau} \right| \quad (\Re z = 1 + 1/\log N).$$

Or $|\zeta(z)^{-1}| \ll \log N$ si $\Re z = 1 + 1/\log N$ et $|z-i\tau| \gg N$ si $N_1 - |\tau| \leq |\Im z| \leq N_1 + |\tau|$, donc l'erreur est $O(|\tau| \log N)$.

Pour $N \geq 3$ et $|\tau| \leq N/5$ on a donc montré

$$M_N(i\tau) = N^{-i\tau} B_N + O((1+|\tau|) \log N). \quad (12)$$

Deuxième étape : déformation du chemin d'intégration

Pour majorer $|B_N|$, nous allons remplacer le segment d'intégration $[1+1/\log N-iN_1, 1+1/\log N+iN_1]$ par une variante \mathcal{S}_N du chemin défini par Soundararajan dans [14], chemin sur lequel les grandes valeurs de l'intégrande sont rares. Nous commençons par une description de \mathcal{S}_N . Nous posons

$$\kappa = \lfloor (\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2} \rfloor, \quad K = \lfloor \log N / \log 2 \rfloor.$$

Nous posons également $T_k = 2^k$ pour $\kappa \leq k \leq K$, et $N_0 = T_\kappa$ (on a $N_1 = T_K$).

Le chemin \mathcal{S}_N est symétrique par rapport à l'axe réel, et constitué de segments verticaux et horizontaux. Nous décrivons seulement la partie de \mathcal{S}_N située dans le demi-plan $\Im z \geq 0$.

- Il y a d'abord un segment vertical $[1/2 + 1/\log N, 1/2 + 1/\log N + iN_0]$.
- Pour chaque k tel que $\kappa \leq k < K$, on considère les entiers n de l'intervalle $[T_k, 2T_k[$. On définit alors V_n comme le plus petit entier de l'intervalle $[(\log \log T_k)^2, \log T_k / \log \log T_k]$ tel que tous les points de $[n, n+1]$ soient V_n -typiques de taille T_k . L'existence de V_n est garantie par la proposition 9. On a même

$$V_n \leq \frac{1}{2} \log n / \log \log n + (1/2 + \delta) \log n (\log \log \log n) / (\log \log n)^2 + 1.$$

On inclut alors dans \mathcal{S}_N le segment vertical $[1/2 + V_n / \log N + in, 1/2 + V_n / \log N + i(n+1)]$

Il y a enfin des segments horizontaux reliant tous ces segments verticaux :

- le segment $[1/2 + 1/\log N + iN_0, 1/2 + V_{N_0} / \log N + iN_0]$;
- les segments $[1/2 + V_n / \log N + i(n+1), 1/2 + V_{n+1} / \log N + i(n+1)]$, $N_0 \leq n \leq T_K - 2$;
- le segment $[1/2 + V_{N_1-1} / \log N + iN_1, 1 + 1/\log N + iN_1]$.

D'après le théorème de Cauchy, on a

$$B_N = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_N} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz.$$

Troisième étape : évaluation de B_N

Lorsque $|z - i\tau|$ n'est pas trop petit devant $|z|$, nous pouvons utiliser les estimations de [14] et [5]. Nous définissons donc $\mathcal{S}_{N,\tau}$ comme la partie de \mathcal{S}_N où $|(\Im z - \tau)/\tau| \leq 1/4$ ($\tau \neq 0$).

Si $z \in \mathcal{S}_N \setminus \mathcal{S}_{N,\tau}$, on a $|z - i\tau| \gg |z|$. Par conséquent (cf. [14] et [5]), pour $N \geq 3$ et $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \left| B_N - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz \right| &\ll \int_{\mathcal{S}_N} \left| \frac{\zeta(z)^{-1} N^z dz}{z} \right| \\ &\ll \sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta}). \end{aligned} \quad (13)$$

Il nous reste à majorer la contribution de $\mathcal{S}_{N,\tau}$.

Supposons $\sqrt{2}N_0 \leq |\tau| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}N_1$. Par symétrie, on peut également supposer $\tau > 0$. On a

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz \right| \leq \sup_{z \in \mathcal{S}_{N,\tau}} |\zeta(z)^{-1} N^z| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \left| \frac{dz}{z - i\tau} \right| \right).$$

Observons que si $z \in \mathcal{S}_N$ et $\Im z \geq N_0$, alors z se trouve sur un des segments horizontaux et verticaux décrits ci-dessus. Sur les deux segments (horizontal et vertical) de $\mathcal{S}_{N,\tau}$ situés dans la bande $n < \Im z \leq n+1$, on a $|z - i\tau|^{-1} \ll (1 + |n - \tau|)^{-1}$, donc l'intégrale est en $O(\log \tau)$.

Pour majorer $|\zeta(z)^{-1} N^z|$, nous utilisons la proposition 6. En posant $n = \lceil \Im z \rceil - 1$, on peut écrire

$$V' \leq (\Re z - 1/2) \log N \leq V,$$

avec $(V, V') = (V_n, V_n)$ dans le cas vertical et (V_{n+1}, V_n) ou (V_n, V_{n+1}) dans le cas horizontal ($\Im z = n+1$), et $\Im z$ V' -typique (de taille correspondante). On peut donc bien appliquer la proposition 6 pour obtenir

$$|\zeta(z)^{-1} N^z| \leq \sqrt{N} \exp(V \log(\log N / \log \Im z) + (2 + 3\delta)V \log \log V).$$

Maintenant, si $z \in \mathcal{S}_{N,\tau}$, on a

$$\tau\sqrt{2} \geq \Im z \geq \tau/\sqrt{2} \geq N_0$$

donc

$$\log N / \log \Im z \leq \log \Im z \leq \log \tau\sqrt{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} V &\leq \frac{1}{2} \log(n+1) / \log \log(n+1) + (1/2 + \delta) \log(n+1) \log \log \log(n+1) / (\log \log(n+1))^2 + 1 \\ &\leq \frac{1}{2} \log \tau / \log \log \tau + (1/2 + 2\delta) \log \tau \log \log \log \tau / (\log \log \tau)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} V \log(\log N / \log \Im z) + (2 + 3\delta)V \log \log V &\leq \frac{1}{2} (\log \tau / \log \log \tau) \log(\log N / \log \tau) \\ &\quad + (3/2 + 5\delta) \log \tau \log \log \log \tau / \log \log \tau. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_{N,\tau}} |\zeta(z)^{-1} N^z| \leq \sqrt{N} \exp\left(\frac{1}{2} (\log \tau / \log \log \tau) \log(\log N / \log \tau) + (3/2 + 5\delta) \log \tau \log \log \log \tau / \log \log \tau\right).$$

Ainsi, pour $\sqrt{2}N_0 \leq |\tau| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}N_1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz &\leq \sqrt{N} \exp((\log |\tau| / 2 \log \log |\tau|) \log(\log N / \log |\tau|) \\ &\quad + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement, en utilisant (13)

$$\begin{aligned} B_N &\leq \sqrt{N} \exp\left(\frac{1}{2} (\log |\tau| / \log \log |\tau|) \log(\log N / \log |\tau|) + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|\right) \\ &\quad + O\left(\sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta})\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Conclusion : estimation de $M_N(i\tau)$

D'après (12) et (14), on a

$$M_N(i\tau) = N^{-i\tau} B_N + O(|\tau| \log N) \quad (1 \leq |\tau| \leq N/5)$$

et

$$B_N \leq \sqrt{N} \exp\left(\frac{1}{2}(\log |\tau| / \log \log |\tau|) \log(\log N / \log |\tau|) + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|\right) \\ + O\left(\sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta})\right).$$

On observe que sous les hypothèses de la proposition, on a :

$$|\tau| \log N \leq N^{1/2} |\tau|^{2/5}$$

et

$$N^{1/2} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta}) \leq N^{1/2} |\tau|^{1/3}.$$

On a également

$$\frac{\log |\tau|}{(\log \log |\tau|)^{5/2}} \geq \frac{3(\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2}}{\left(\log(3(\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2})\right)^{5/2}} \\ \geq \sqrt{\log N}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\log N}{\log |\tau|} \leq \frac{\log |\tau|}{(\log \log |\tau|)^5},$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2} \frac{\log |\tau|}{\log \log |\tau|} \cdot \log\left(\frac{\log N}{\log |\tau|}\right) + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \frac{\log \log \log |\tau|}{\log \log |\tau|} \leq \frac{1}{2} \log |\tau| + (-1 + 6\delta) \log |\tau| \frac{\log \log \log |\tau|}{\log \log |\tau|}$$

et permet de conclure. \square

6.3 Estimations de $\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon)$

Démontrons à présent la proposition 10 et revenons à l'estimation de la différence

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon),$$

que nous exprimons d'abord à l'aide d'une intégrale :

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) = -M_N(i\tau) N^{-1/2-\varepsilon} + (1/2 + \varepsilon) \int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt \quad (N \geq 1, \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}) \quad (15)$$

On suppose N assez grand, $\varepsilon \geq 2(\log \log N)^{5/2+\delta} (\log N)^{-1/2}$, et $\tau \in \mathbb{R}$.

Petites valeurs de $|\tau|$

On a d'abord, d'après la proposition 11,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll (1 + |\tau|)N^{-\varepsilon} \exp((\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+\delta}).$$

D'autre part, pour $t \geq N$, on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \log t \geq (\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+\delta}.$$

En particulier,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll (1 + |\tau|)N^{-\varepsilon/2}.$$

Et aussi,

$$\begin{aligned} \int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt &\ll (1 + |\tau|) \int_N^\infty t^{-1-\varepsilon} \exp((\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+\delta}) dt \\ &\leq (1 + |\tau|) \int_N^\infty t^{-1-\varepsilon/2} dt \\ &\ll \varepsilon^{-1} (1 + |\tau|) N^{-\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} &\leq (\log \log N)^{-5/2} (\log N)^{1/2} \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{3} (\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+\delta}\right) \\ &\leq N^{\varepsilon/6}, \end{aligned}$$

donc $\varepsilon^{-1} N^{-\varepsilon/2} \ll N^{-\varepsilon/3}$, ce qui donne sous nos hypothèses, la majoration

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) \ll (1 + |\tau|) N^{-\varepsilon/3}.$$

Dans le cas $\exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta}) \geq |\tau|$, pour obtenir le résultat de la proposition 10, il nous suffit donc de démontrer que

$$(1 + |\tau|) N^{-\varepsilon/3} \ll (1 + |\tau|)^{1/3} N^{-\varepsilon/4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon}{12} \log N \geq \frac{2}{3} \log(1 + |\tau|).$$

Or on a bien dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \log(1 + |\tau|) &\leq \frac{2}{3} \left(3(\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta} + O(1) \right) \\ &\leq \frac{25}{12} (\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{12} \log N. \end{aligned}$$

Grandes valeurs de $|\tau|$

Si $\exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta}) \leq |\tau| \leq N^{3/4}$, on a d'abord, d'après la proposition 12,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon}|\tau|^{1/2-\kappa(\tau)}.$$

Étudions maintenant l'intégrale

$$\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt.$$

Pour commencer, observons que $|\tau| \leq N^{3/4} \leq t^{3/4}$ si $t \geq N$.

D'autre part, définissons $\theta = \theta(\tau)$ par la relation

$$|\tau| = \exp(3(\log \theta)^{1/2}(\log \log \theta)^{5/2+6\delta}).$$

On a $\theta \geq N$ si $|\tau| \geq \exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta})$, et

$$\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt = \int_N^\theta t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt + \int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt.$$

Pour la première intégrale, nous pouvons utiliser la proposition 12 car $t \leq \theta \Rightarrow |\tau| \geq \exp(3(\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_N^\theta t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt &\ll |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)} \int_N^\theta t^{-1-\varepsilon} dt \\ &\leq |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)} \varepsilon^{-1} N^{-\varepsilon} \\ &\leq |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)} N^{-5\varepsilon/6}, \end{aligned}$$

comme dans le cas précédent.

Pour la seconde intégrale, nous pouvons utiliser la proposition 11. On a

$$\int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt \ll |\tau| \int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon} \exp((\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta}) dt.$$

Maintenant, pour $t \geq \theta(\tau)$ ($\geq N$), on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \log t \geq 4(\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt &\ll |\tau| \int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon/2} \exp(-3(\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta}) dt \\ &\leq |\tau| \exp(-3(\log \theta)^{1/2}(\log \log \theta)^{5/2+6\delta}) \int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon/2} dt \\ &= (2/\varepsilon) \theta^{-\varepsilon/2} \\ &\leq (2/\varepsilon) N^{-\varepsilon/2} \\ &\ll N^{-\varepsilon/3} \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/3} |\tau|^{1/2 - \kappa(\tau)}$$

Notons à présent que pour $|\tau|$ grand, on a $\beta(\tau) - \kappa(\tau) \ll 1/\log |\tau|$. Cela permet de conclure la démonstration de la proposition 10. \square

7 Majoration de $I_{N,\varepsilon}$

Dans tout ce paragraphe, on pose $\sigma = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $s = \frac{1}{2} + i\tau$.

Proposition 13 (HR) *Pour $N \geq 1$, $0 < \varepsilon \leq 1/2$, on a*

$$\int_{|\tau| \geq N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s + \varepsilon) - M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-1/9}. \quad (16)$$

Démonstration

Il suffit de démontrer que, pour $T \geq 1$,

$$I_N(T, \varepsilon) = \int_{T \leq |\tau| \leq 2T} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll T^{-3/2} (T + N) \log N, \quad (17)$$

car (16) résultera de la sommation de (17) pour les valeurs $T = 2^k N^{3/4}$, $k \in \mathbb{N}$.

On a

$$I_N(T, \varepsilon) \ll T^{-2} \int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)|^2 d\tau + 4T^{-2} \int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)|^2 |M_N(s + \varepsilon)|^2 d\tau.$$

D'une part,

$$\int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)|^2 d\tau \ll T^{3/2},$$

d'après le point (i) de la proposition 4.

D'autre part,

$$\int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)|^2 |M_N(s + \varepsilon)|^2 d\tau \leq T^{1/2} \int_{T \leq \tau \leq 2T} \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-1/2 - \varepsilon} n^{-i\tau} \right|^2 d\tau,$$

d'après l'inégalité $|\zeta(s)| \ll \tau^{1/4}$ (cf. [16], (5.1.8) p.96).

La dernière intégrale vaut

$$(T + O(N)) \sum_{n \leq N} \mu^2(n) n^{-1 - 2\varepsilon} \leq (T + N) \log N,$$

d'après une inégalité de Montgomery et Vaughan (cf. [13], (5) p.128), et car $\sum_{n \leq N} n^{-1 - 2\varepsilon} \ll \log N$. Par conséquent,

$$I_{N,\varepsilon} \ll T^{-3/2} (T + N) \log N. \quad \square$$

Proposition 14 (HR) *Soit N assez grand et $\varepsilon \geq 25(\log \log N)^{5/2+6\delta}(\log N)^{-1/2}$. Alors,*

$$\int_{|\tau| \leq N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-\varepsilon/2}.$$

Démonstration

Pour $|\tau| \leq N^{3/4}$, on a

$$\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/4}(1+|\tau|)^{1/2-\beta(\tau)},$$

d'après la proposition 10. D'autre part,

$$\begin{aligned} |\zeta(s)|^2 &\ll \exp\left(O(\log(3+|\tau|)/\log \log(3+|\tau|))\right) & ([16], (14.14.1)) \\ &\ll (1+|\tau|)^{\beta(\tau)}, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{|\tau| \leq N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s+\varepsilon) - M_N(s+\varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-\varepsilon/2} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau|)^{-1-\beta(\tau)} d\tau,$$

où la dernière intégrale est convergente. □

Les deux propositions précédentes entraînent la proposition 3, ce qui achève la démonstration du théorème.

Références

- [1] L. Báez-Duarte, *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis*, Adv. in Maths. **101** (1993), 10-30.
- [2] L. Báez-Duarte, *A class of invariant unitary operators*, Adv. in Maths. **144** (1999), 1-12.
- [3] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias, *Notes sur la fonction ζ de Riemann*, 3, Adv. in Maths. **149** (2000), 130-144.
- [4] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9) **14** (2003), 5-11.
- [5] M. Balazard et A. de Roton, *Notes de lecture de l'article « Partial sums of the Möbius function » de Kannan Soundararajan*, arXiv :0810.3587
- [6] J.-F. Burnol, *A lower bound in an approximation problem involving the zeroes of the Riemann zeta function*, Adv. in Maths. **170** (2002), 56-70.
- [7] J.-F. Burnol, *On an analytic estimate in the theory of the Riemann zeta function and a theorem of Báez-Duarte*, Acta Cientifica Venezolana **54** (2003), 210-215.
- [8] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, 3rd edition revised by H.L. Montgomery, Springer, 2000.
- [9] H.G. Diamond et K.S. McCurley, *Constructive elementary estimates for $M(x)$* , Analytic number theory, Lecture Notes in Mathematics **899**, Springer (1981), 239-253.
- [10] D.A. Goldston et S.M. Gonek, *A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 482-486.

- [11] J.E. Littlewood, *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re s > \frac{1}{2}$* , C.R.A.S. Paris **154** (1912), 263-266.
- [12] H. Maier et H.L. Montgomery, *The sum of the Möbius function*, à paraître au J. London Math. Soc.
- [13] H.L. Montgomery, *Ten lectures at the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS **84**, AMS 1994.
- [14] K. Soundararajan, *Partial sums of the Möbius function*, arXiv :0705.0723v2
- [15] P. Tchebichef (sic), *Mémoire sur les nombres premiers*, J. Maths pures et appliquées, (Ser. I) **17** (1852), 366-390.
- [16] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd edition revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.
- [17] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3^e édition, Belin, 2008.
- [18] E.T. Whittaker et G.N. Watson, *A course of modern analysis*, 4th edition, Cambridge University Press, 1927.

BALAZARD, Michel
 Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206
 CNRS, Université de la Méditerranée
 Case 907
 13288 Marseille Cedex 09
 FRANCE
 Adresse électronique : `balazard@iml.univ-mrs.fr`

de ROTON, Anne
 Institut Elie Cartan de Nancy, UMR 7502
 Nancy-Université, CNRS, INRIA
 BP 239
 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
 FRANCE
 Adresse électronique : `deroton@iecn.u-nancy.fr`